Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα

Περιεχόμενα

- Προβλήματα κυλινδρικής συμμετρίας
  - Συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel.
  - Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου και 2ου είδους.
- Προβλήματα σφαιρικής συμμετρίας
  - Πολυώνυμα Legendre 1ου και 2ου είδους.
  - Σφαιρικές αρμονικές.
  - Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel.
- Γενική θεωρία ορθογώνιων πολυωνύμων
  - Πολυώνυμα Jacobi.
  - Πολυώνυμα Gegenbauer, Hermite, Laguerre, Chebyshev.
  - Σχέση με υπεργεωμετρική εξίσωση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \ . \tag{1}$$

- Λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \ . \tag{2}$$

- Με αντικατάσταση οδηγούμαστε στις εξισώσεις
  - Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ , \qquad \nu \in \mathbb{Z} \ .$$

  - Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim e^{\pm kz} \ , \qquad k \in \mathbb{C} \ .$$

  - Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ΄ την

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \ . \tag{3}$$

Συναρτήσεις *Bessel* και *Neumann*

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση με $k \in \mathbb{R}$.

- Οι λύσεις τις $Z(z)$ είναι εκθετικές συναρτήσεις.
- Θέτοντας $x = k\rho$, $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$ η ακτινική εξίσωση (3) γράφεται ως

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \ , \tag{4}$$

  που είναι η εξίσωση Bessel.
- Το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \ , \tag{5}$$

- Με απλή αντικατάσταση $\lambda = \pm\nu$. Θέτοντας $\lambda = \nu$

$$a_1(2\nu + 1)x^{m+1} + \sum^{\infty} [a_m m(2\nu + m) + a_{m-2}]x^{m+\nu} = 0 \ ,$$

- Απ΄ αυτήν προκύπτει (αν $\nu \neq -1/2$, περίπτωση που θα σχολιάσω παρακάτω), η αναδρομική σχέση [Άσκηση]

$$a_m m(2\nu + m) + a_{m-2} = 0 \ , \qquad \text{καθώς και } a_1 = 0 \ ,$$

  η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_{2m} συναρτήσει του a_0, ενώ $a_{2m+1} = 0$.
- Επιλύοντάς την και αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \ , \qquad (6)$$

  όπου $J_\nu(x)$ είναι οι λεγόμενες συναρτήσεις Bessel.

Για την εύρεση της 2ης ανεξάρτητης λύσης της εξίσωσης Bessel διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\nu \notin \mathbb{Z}$ τότε η 2η ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης Bessel είναι η
$$y_2(x) = J_{-\nu}(x) , \qquad \nu \notin \mathbb{Z} , \tag{7}$$
η οποία προκύπτει θέτοντας $\lambda = -\nu$ και παρόμοια με την παραπάνω διαδικασία.
- Αν $\nu = n \in \mathbb{Z}$ τότε
$$\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$$
και απ΄ την (6) έχουμε ότι
$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} \end{aligned}$$

- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι
$$k! = \Gamma(k+1) = \infty \ , \qquad \text{για } k = -n, \ldots, -1 \ ,$$
βλέπουμε ότι το άθροισμα
$$\sum_{k=-n}^{-1} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} = 0 \ .$$
- Τελικά έχουμε ότι
$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= (-1)^n J_n(x) \ . \end{aligned}$$
Άρα η $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ δεν αποτελεί ανεξάρτητη λύση.
- Η 2η ανεξάρτητη λύση ορίζεται ως
$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \ . \qquad (8)$$
και ονομάζεται συνάρτηση Neumann. Αν $\nu \in \mathbb{Z}$ το όριο είναι απροσδιόριστο της μορφής $0/0$. Με τον κανόνα L' Hopital δείχνεται ότι το όριο είναι καλώς ορισμένο [Άσκηση]

Η γενική λύση της ακτινικής εξίσωσης (3) είναι η υπέρθεση

$$R_k(\rho) = A_k J_\nu(k\rho) + B_k Y_\nu(k\rho) \ . \tag{9}$$

- Επιπλέον υπέρθεση προκύπτει αν χρειασθούν τα μηδενικά των $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$, όπως θα δούμε αργότερα.
- Αν η αρχή των αξόνων $\rho = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού και επιζητούμε πεπερασμένες λύσεις, τότε $B_k = 0$. Αν $\rho = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, τότε και οι δύο λύσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν.
- Όμως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται συγκεκριμένη ανώμαλη συμπεριφορά που εκφράζει π.χ. όρο πηγής ενέργειας, παρουσία ηλεκτρικού φορτίου κλπ. Τότε $B_k \neq 0$.

Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά: Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται η συμπεριφορά των συναρτήσεων $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$:

- Για μικρές τιμές του x έχουμε

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(1+\mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad n \notin \mathbb{Z}^- ,$$

$$Y_\nu(x) \simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \left(1+\mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad \nu \neq 0$$

και

$$Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi}(\ln(x/2)+\gamma) ,$$

όπου $\gamma = 0.57721\ldots$ είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) .$$

- Για μεγάλες τιμές του x

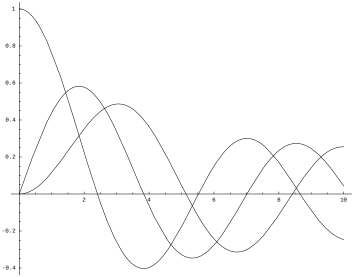
$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \qquad x \gg 1$$

και

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \qquad x \gg 1 .$$

Η συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel και Newmann με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω:

- Μόνο οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x)$ έχουν ομαλή συμπεριφορά για $x \ll 1$.
- Για $x \gg 1$ οι $J_n(x)$ και οι $Y_n(x)$ συμπεριφέρονται ως sin και cos με πλάτος μειούμενο ως $1/\sqrt{x}$.



Σχήμα: α) Γραφικά των συναρτήσεων Bessel $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2$ και β) των συναρτήσεων Newmann $Y_n(x)$, $n = 0, 1, 2$.

Γεννήτρια Συνάρτηση: Είναι της μορφής

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ . \qquad (10)$$

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε το αριστερό μέλος (AM) χρησιμοποιώντας και την ανάπτυξη σε διώνυμο

$$\begin{aligned} \mathrm{AM} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \overbrace{\left[\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}(-1)^s t^{r-s} \delta_{r+s,m}\right]} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{t^{r-s}}{r!s!} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \underbrace{\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right]} \ , \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα άλλαξα τον δείκτη άθροισης θέτοντας $r-s=n$. Το άθροισμα στην αγκύλη είναι η συνάρτηση $J_n(x)$.

Η φυσική σημασία της γεννήτριας συνάρτηση μπορεί να δωθεί στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής. Θεωρείστε ελεύθερο σωμάτιο στον $\mathbb{R}^2$ (άπειρο επίπεδο).

- Η Χαμιλτονιανή εναλλάσεται με τους τελεστές ορμής (που γεννούν μετατοπήσεις κατά μήκος των δύο αξόνων)

$$P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \ , \quad a = 1,2 \ , \qquad [P_1, P_2] = 0 \ , \tag{11}$$

  διότι σε κατάλληλες μονάδες έχουμε ότι

$$H = P_1^2 + P_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad [H, P_{1,2}] = 0 \ . \tag{12}$$

- Άρα οι κοινές ιδιοκαταστάσεις είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{ik\rho\cos\phi} \ ,$$

  και υπακούουν

$$P_a\Psi_{\mathbf{k}} = k_a\Psi_{\mathbf{k}} \ , \quad a = 1,2 \ , \qquad H\Psi_{\mathbf{k}} = k^2\Psi_{\mathbf{k}} \ .$$

- Ο τελεστής στροφορμής που γεννά στροφές στο επίπεδο είναι

$$J = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \quad \Longrightarrow \quad [J, P_1] = P_2 \ , \quad [J, P_2] = -P_1 \ , \qquad (13)$$

Οι εναλλάκτες αποδεικνύονται είτε με αναγραφή των P_a σε πολικές συντεταγμένες είτε του J σε Καρτεσιανές [Άσκηση].

- Η εξίσωση Scrhödinger σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = E\Psi \ , \qquad E = k^2 \ .$$

Με χωρισμό μεταβλητών επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\Psi_{n,k}(\rho,\phi) = e^{in\phi}J_n(k\rho) \ ,$$

Επειδή

$$[H, J] = 0 \ ,$$

θα πρέπει να είναι δυνατή η ταυτόχρονη διαγωνοποίησή των H και J. Πράγματι οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές υπακούουν

$$J\Psi_{n,k} = n\Psi_{n,k} \ , \qquad H\Psi_{n,k} = k^2\Psi_{n,k} \ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση (10) για $x = k\rho$ και $t = e^{i\phi}$ γράφεται

$$e^{ik\rho\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(k\rho) \quad \Longrightarrow \quad \Psi_{\mathbf{k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{n,k} \ .$$

- Ιδιοκαταστάσεις στροφορμής $\Longrightarrow$ Ιδιοκαταστάσεις ορμής.

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Απ' τη γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ ,$$

αντιστέφοντας, βρίσκουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \ t^{-n-1} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \ , \tag{14}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε μικρό κύκλο γύρω απ' το $t=0$ στο μιγαδικό επίπεδο.

- Θέτοντας $t = e^{i\phi}$ βρίσκουμε την ισοδύναμη σχέση

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{ix\sin\phi} \ .$$

  Η τελευταία σχέση είναι εξαιρετικά χρήσιμη.
- Όπου εμφανίζονται ολοκληρώματα με sin και cos στον εκθέτη είναι πολύ πιθανόν να μπορούν να εκφρασθούν μέσω συναρτήσεων Bessel.

Ταυτότητες: Με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{aligned} 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \ , \\ \frac{2n}{x} J_n(x) &= J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \ . \end{aligned}$$

π.χ. παραγωγίζοντας τη σχέση (10) για τη γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{1}{t} \right) t^n J_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \ , \end{aligned}$$

απ΄ την οποία αποδεικνύεται η 1η εκ των παραπάνω σχέσεων. Σημειώνω ότι για τη 2η ισότητα αλλάχθηκε ο δείκτης άθροισης από $n \to n \mp 1$ στους δύο όρους αντίστοιχα.

Απ' την ανάπτυξη της συνάρτησης Bessel σε απειροσειρά και παρόμοιες μεθόδους μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \ ,$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^{-n} J_n(x)\right] = (-1)^m x^{-m-n} J_{m+n}(x) \ .$$

Παρατηρήσεις:

- Οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για $n \to \nu \notin \mathbb{Z}$.
- Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και ότι $e^{i\nu\pi} = -e^{i(\nu\pm1)\pi}$, αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για τις συναρτήσεις $Y_\nu(x)$.

Προσθετικό θεώρημα: Ισχύει ότι

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \ . \tag{15}$$

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη σχέση για τη γεννήτρια συνάρτηση, με ορίσματα x και y, έχουμε

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-1/t)} = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} t^{k+m} J_m(x) J_k(y) \ .$$

Το αριστερό μέλος (AM) μέσω της γεννήτριας συνάρτησης είναι

$$\mathrm{AM} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x+y) \ .$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με t^{-n-1} και ολοκληρώντας στο μιγαδικό t-επίπεδο γύρο απ΄ το $t=0$, αποδεικνύεται η (15).

Σημεία μηδενισμού: Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τα σημεία μηδενισμού των συναρτήσεων Bessel και Neumann

$$J_\nu(x_{\nu,m}) = 0 \;, \qquad Y_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) = 0 \;, \tag{16}$$

των οποίων οι λύσεις είναι άπειρες στο πλήθος.

- Για τις μεγάλες ρίζες χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$ έχουμε

  $$x_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{(2m+1)\pi}{2} \;, \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \;,$$

  και

  $$\tilde{x}_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + m\pi \;, \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \;.$$

- Σημειώνω επίσης τις χρήσιμες σχέσεις

  $$J'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x_{\nu,m}}} \;, \qquad Y'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{\nu,m}}}$$

  και $J'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq Y'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq 0$, στο όριο των μεγάλων ριζών.

Ορθογωνιότητα και πληρότητα: Η εξίσωση Bessel (3) αποτελεί ειδική περίπτωση της εξίσωσης Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{d\Phi}{dx}\right) + (Eh + p)\Phi = 0 \ ,$$

με ($x = \rho$ και $\Phi = R$ στην περίπτωσή μας)

$$f(\rho) = h(\rho) = \rho \ , \qquad E = k^2 \ , \qquad p(\rho) = -\frac{\nu^2}{\rho} \ .$$

Απ΄ τη γενική θεωρία στο διάστημα $\rho \in [0, a]$ έχουμε

$$\begin{aligned}(k^2 - k'^2)\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) &= \\ a\left[k' J_\nu(ka)J'_\nu(k'a) - kJ_\nu(k'a)J'_\nu(ka)\right] \ .\end{aligned}$$

Με Dirichlet οριακές συνθήκες

$$J_\nu(ka) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = k_{\nu,m} = \frac{x_{\nu,m}}{a} \ , \quad (\text{ παρόμοια για } k') \ ,$$

που οδηγούν σε κβάντωση του κυματανύσματος.
Τελικά έχουμε:

- Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho\rho \ J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m'}\rho/a) &= \mathcal{N}_{\nu,m}\delta_{m,m'} \\ &= \frac{a^2}{2}[J'_\nu(x_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'} \end{aligned} \tag{17}$$

- ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{N}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \ . \tag{18}$$

Με Neumann οριακές συνθήκες

$$J'_\nu(ka) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = k_{\nu,m} = \frac{y_{\nu,m}}{a} \ , \quad [\text{παρόμοια για } k']$$

επίσης έχουμε κβάντωση των κυματανυσμάτων.
Τελικά έχουμε:

- Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m'}\rho/a)$$
$$= \mathcal{M}_{\nu,m}\delta_{m,m'} = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2}\right)[J_\nu(y_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'} \ , \tag{19}$$

- ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{M}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \ . \tag{20}$$

Γενική παρατήρηση: Στις σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας η τάξη ν των συναρτήσεων J_ν και Y_ν είναι σταθερή.

Ορθοκανονικές σχέσεις σε όλο το χώρο: Θεωρούμε το διάστημα $\rho \in [0, \infty)$, οπότε πρέπει να πάρουμε το όριο $a \to \infty$ στις προηγούμενες σχέσεις.

- Επειδή οι επιτρεπόμενες τιμές του κυματανύσματος είναι κβαντισμένες και δίνονται από την $k_{\nu,m} = x_{\nu,m}/a$, το όριο $a \to \infty$ σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε τις μεγάλες ρίζες $x_{\nu,m}$ των Bessel ώστε ο λόγος να είναι πεπερασμένος.
- Το φάσμα είναι συνεχές με πυκνότητα

$$\frac{dk}{dm} \simeq \frac{\pi}{a} ,$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $k \simeq \pi m +$ σταθερά για τις μεγάλες ρίζες.
- Στο συνεχές όριο

$$\sum_m \to \int dm = \frac{a}{\pi} \int dk$$

και επίσης

$$\delta_{m,m'} \simeq \frac{\delta(k-k')}{dm/dk} \simeq \frac{\pi}{a}\delta(k-k') .$$

- Η κανονικοποίηση είναι ανεξάρτητη των οριακών συνθηκών [Άσκηση]

$$\mathcal{N}_{\nu,m} \simeq \mathcal{M}_{\nu,m} \simeq \frac{a}{\pi k} \ .$$

- Τελικά οι σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας γίνονται

$$\int_0^\infty d\rho\rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k} \tag{21}$$

και

$$\int_0^\infty dkk J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \ . \tag{22}$$

Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Hankel της Bessel είναι πάλι μια συνάρτηση Bessel.

Υπολογισμός σταθερών κανονικοποίησης: Θέλουμε να υπολογίσουμε τις σταθερές κανονικοποίησης που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα με συναρτήσεις Bessel για Dirichlet και Neumann οριακές συνθήκες.
Η βασική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι

$$(k^2 - k'^2)\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \\ a\left[k' J_\nu(ka)J_\nu'(k'a) - kJ_\nu(k'a)J_\nu'(ka)\right]\ ,$$

Αυτή απορρέει απ΄ τη γενική θεωρία προβλημάτων τύπου Sturm–Liouville, εφαρμοσμένη στην περίπτωσή μας.

- Θέλουμε το όριο $k \to k'$.
  - Το αριστερό μέλος είναι

$$(\mathrm{AM}) \simeq 2k'(k-k')\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu^2(k'\rho)\ .$$

  - Το δεξί μέλος είναι

$$(\Delta\mathrm{M}) \simeq (k-k')a\left[xJ_\nu'^2(x) - J_\nu(x)J_\nu'(x) - xJ_\nu(x)J_\nu''(x)\right]_{x=k'a}\ .$$

Εξισώνοντας το δύο μέλη έχουμε τη γενική σχέση για κάθε οριακή συνθήκη που επιβάλλουμε

$$\int_0^a d\rho\rho\; J_\nu^2(k'\rho) = \frac{a}{2k'}\left[xJ_\nu'^2(x) - J_\nu(x)J_\nu'(x) - xJ_\nu(x)J_\nu''(x)\right]_{x=k'a} . \tag{23}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Την Dirichlet οριακή συνθήκη $J_\nu(k'a) = 0$, οπότε $k' = x_{\nu,m}/a$ και η (23) γίνεται

$$\int_0^a d\rho\rho\; J_\nu^2(x_{\nu,m}\rho/a) = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(x_{\nu,m})]^2 .$$

- Την Neumann οριακή συνθήκη $J_\nu'(k'a) = 0$, οπότε $k' = y_{\nu,m}/a$ και η (23) γίνεται

$$\begin{aligned}\int_0^a d\rho\rho\; J_\nu^2(y_{\nu,m}\rho/a) &= -\frac{a^2}{2}J_\nu(y_{\nu,m})J_\nu''(y_{\nu,m}) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2}\right)J_\nu^2(y_{\nu,m}) .\end{aligned}$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων: Σε εφαρμογές εμφανίζονται ολοκληρώματα με όρια μηδενικά συναρτήσεων Bessel. Μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια αναδρομικών σχέσεων.

Παράδειγμα: Ας υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{x_n} dx\, x \left(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\right) J_0(x) , \qquad J_0(x_n) = 0 , \\ B_n &= \int_0^{y_n} dx\, x^3 J_0(x) , \qquad J_1(y_n) = 0 . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$xJ_0(x) = (xJ_1(x))'$$

και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{x_n^2} \int_0^{x_n} dx\, x^2 J_1(x) , \\ B_n &= -2 \int_0^{y_n} dx\, x^2 J_1(x) . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

$$x^2 J_1(x) = (x^2 J_2(x))' \ , \qquad J_2(x_n) = \frac{2}{x_n} J_1(x_n) \ ,$$

βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4}{x_n} J_1(x_n) \ , \qquad J_0(x_n) = 0 \ , \\ B_n &= -2y_n^2 J_2(y_n) \ , \qquad J_1(y_n) = 0 \ . \end{aligned}$$

Ως [Άσκηση] καλείστε να συμπληρώσεται μερικά ενδιάμεσα βήματα, στα οποία γίνεται φανερή η σημασία του γεγονότος ότι τα x_n και y_n είναι ρίζες των $J_0(x)$, $J_1(x)$, αντιστοίχως.

Συναρτήσεις *Hankel*

Στη Φυσική τεράστιο ενδιαφέρον, εξαιτίας και των τεχνολογικών εφαρμογών τους, παρουσιάζουν οι λύσεις εκείνες των εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα και που παριστάνουν διάδοση κυμάτων (π.χ. Ηλεκτρομαγνητικών, ακουστικών κλπ).

- Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν λύσεις οι οποίες συμπεριφέρονται ως κυλινδρικά ή σφαιρικά κύματα σε μεγάλες αποστάσεις από τις πηγές που τα δημιουργούν.
- Στην περίπτωση της εξίσωσης Bessel ορίζουμε έτσι τις συναρτήσεις Hankel:
  - Hankel 1ου είδους

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \ . \tag{24}$$

  - Hankel 2ου είδους

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \ . \tag{25}$$

- Η x είναι το γινόμενο του κυματανύσματος με την ακτινική συντεταγμένη σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.
- Για μικρές αποστάσεις $x \ll 1$ η συμπεριφορά τους είναι ανώμαλη, αλλά αυτό είναι συμβατό με την ύπαρξη πηγών στο φυσικό πρόβλημα.
- Για μεγάλες αποστάσεις έχουμε

$$H_\nu^{(1,2)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\pm i(x-\nu\pi/2-\pi/4)} , \qquad x \gg 1 . \tag{26}$$

Συνδυάζοντας με χρονική εξάρτηση του τύπου $e^{\pm i\nu t}$, βλέπουμε συμπεριφορά κύματος με μειούμενο πλάτος.

Τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*

Θεωρούμε τώρα περιπτώσεις όπου η σταθερά διαχωρισμού k της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι φανταστική. Τότε έχουμε επίσης τριγωνομετρική συμπεριφορά και για την $Z(z)$.
Για λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \ . \tag{27}$$

έχουμε τις εξής ΔΕ:

- Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ , \qquad \nu \in \mathbb{R} \ .$$

- Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim e^{\pm ikz} \ , \qquad k \in \mathbb{R} \ .$$

- Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ' την

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \; .$$

- Θέτοντας $x = k\rho$, $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$ η ακτινική εξίσωση γίνεται η λεγόμενη τροποποιημένη εξίσωση Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \; . \qquad (28)$$

  Οι λύσεις της είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel:
  - 1ου είδους

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \qquad (29)$$

  - και 2ου είδους

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right) \; . \qquad (30)$$

- Ο παράγοντας $i^{-\nu}$ εισήχθηκε έτσι ώστε οι συναρτήσεις $I_\nu(x)$ και $K_\nu(x)$ να είναι πραγματικές.

Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά:

- Για μικρές τιμές του x έχουμε

$$I_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(1+\mathcal{O}(x^2)\Big) , \qquad n \notin \mathbb{Z}^-$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \Big(1+\mathcal{O}(x^2)\Big) , \qquad \nu \neq 0$$

και

$$K_0(x) \simeq -[\ln(x/2)+\gamma] ,$$

$\gamma = 0.57721\ldots$ είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

- Για μεγάλες τιμές του x

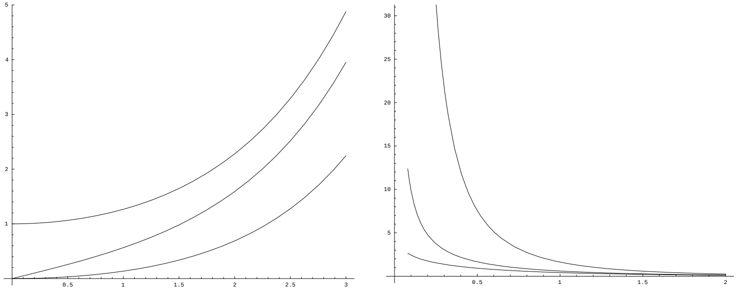
$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x , \qquad x \gg 1$$

και

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2x}}e^{-x} , \qquad x \gg 1 .$$

Προσέξτε ότι είναι ανεξάρτητες του δείκτη ν.

Η συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω. Οι $I_n(x)$ έχουν ομαλή συμπεριφορά για $x \ll 1$ και οι $K_n(x)$ για $x \gg 1$.



Σχήμα: α) Γραφικά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $I_n(x)$, $n = 0, 1, 2$ και β) $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2$.

Γεννήτρια συνάρτηση: Στη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ ,$$

θέτουμε όπου $x \to ix$ και $t \to -is$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, παίρνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel

$$e^{\frac{x}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n I_n(x) \ . \tag{31}$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Στην ολοκληρωτική αναπαράσταση για την $J_n(x)$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{ix\sin\phi} \ ,$$

θέτουμε όπου $x \to ix$ και βρίσκουμε ότι

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{x\cos\phi} \ . \tag{32}$$

Αναδρομικές σχέσεις: Αυτές βρίσκονται απ΄ τις αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Bessel. π.χ. [Άσκηση]

$$\begin{aligned} 2I'_n(x) &= I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) \ , \\ \frac{2n}{x} I_n(x) &= I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) \ . \end{aligned} \tag{33}$$

- Έχουν ισχύ και για $n \rightarrow \nu \notin \mathbb{Z}$, καθώς επίσης και για τις $K_\nu(x)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2\Psi = 0 \ . \tag{34}$$

και υποθέτουμε σφαιρική συμμετρία. Με χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{35}$$

και αντικατάσταση στην (34) οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

- Εξάρτηση απ' την γωνία ϕ

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ ,$$

- Εξάρτηση απ' την ακτινική συντεταγμένη r

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} - \ell(\ell+1)\frac{R}{r} = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad R \sim r^{\ell} \ , \quad r^{-\ell-1} \ ,$$

όπου $\nu, \ell \in \mathbb{R}$ σταθερές απ' το χωρισμό μεταβλητητών.

- Επίσης παίρνουμε και τη ΔΕ για την εξάρτηση απ' τη γωνία θ

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \ . \qquad (36)$$

- Με αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$ αυτή γράφεται

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \ . \qquad (37)$$

την οποία εν συνεχεία μελετούμε.

Πολυώνυμα *Legendre*

Προς εύρεση λύσεων της (37) εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση με $\nu = 0$ οπότε η (37) ανάγεται στη ΔΕ Legendre

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \ell(\ell+1)\Theta = 0\ , \qquad x = \cos\theta\ . \tag{38}$$

Οι λύσεις της εξαρτώνται:

- Απ' το διάστημα στο οποίο η θ παίρνει τιμές. Σημειώνω ότι $0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ \Rightarrow\ -1 \leqslant x \leqslant 1$, αλλά σε εφαρμογές το διάστημα της θ μπορεί να είναι ακόμα μικρότερο.
- Εαν $\ell \geqslant 0$ και ακέραιος, το οποίο επίσης υποθέτουμε.

Π.χ. για $\ell = 0$, έχουμε η (38) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) = 0 \ ,$$

η οποία έχει δύο λύσεις:

$$\Theta = 1 \ , \qquad \Theta = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \ ,$$

οι οποίες είναι κανονικοποιήσιμες στο διάστημα $x \in [-1,1]$. Όμως, εκτός και αν συντρέχουν λόγοι, η 2η λύση είναι απορριπτέα γιατί απειρίζεται στους πόλους για $\theta = 0, \pi$.

- Για ακέραια $\ell > 1$ έχουμε πάντα ως λύση πολυώνυμο τάξεως $\ell + 1$. Η 2η λύση περιέχει όρο με $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
- Ο λόγος εμφάνισης των λογαρίθμων είναι ότι η εξίσωση Legendre έχει συνήθη ανώμαλα σημεία στα $x = \pm 1$ για τα οποία η χαρακτηριστική εξίσωση έχει λύσεις $\rho_1 = \ell + 1$ και $\rho_2 = -\ell$ [Άσκηση].
  Η διαφορά $\rho_1 - \rho_2 = 2\ell + 1$ είναι ακέραιος, οπότε απ΄ τη γενική θεωρία ΔΕ, η λύση της (38) θα περιέχει $\ln(1 \pm x)$.

Ορισμός: Ως βάση των πολυωνύμων τάξης $\ell+1$, μπορούμε να πάρουμε την $\{x^m\}$ με $m = 0, 1, \ldots, \ell+1$, η οποία δεν είναι ορθοκανονική, αλλά μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των Gram–Schmidt. Το αποτέλεσμα είναι τα πολυώνυμα Legendre που ορίζονται απ΄ τον τύπο του Rodriguez

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \ , \tag{39}$$

όπου η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε $P_\ell(1) = 1$. Μπορεί να δειχθεί ότι τα $P_\ell(x)$ ικανοποιούν την εξίσωση Legendre [Άσκηση].

Εναλλακτική μέθοδος με δυναμοσειρά: Οι λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \ell(\ell+1)\Theta = 0 \ ,$$

μπορούν να βρεθούν με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά.

- Το σημείο $x = 0$ είναι ομαλό οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \ ,$$

- Με απλή αντικατάσταση παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$a_{m+2} = \frac{m(m+1) - \ell(\ell+1)}{(m+1)(m+2)} a_m \ .$$

Η απειροσειρά τερματίζεται στον όρο με $m = \ell$.

- Η σταθερά κανονικοποίησης καθορίζεται απ΄ τη σύμβαση ότι ο συντελεστής του όρου x^ℓ στο $P_\ell(x)$ είναι

$$\frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2 2^\ell} ,$$

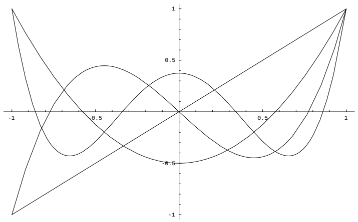
επιλεγμένος έτσι ώστε το αποτέλεσμα να συμφωνεί με τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodriguez, δηλαδή

$$y(x) = P_\ell(x) .$$

Τα χαμηλότερης τάξης πολυώνυμα Legendre είναι:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \ , \\
P_1(x) &= x \ , \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \ , \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ , \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \ ,
\end{aligned}
$$

και παρακάτω αναπαρίστανται γραφικά μερικά απ΄ αυτά



Σχήμα: Γραφικά των πολυωνύμων Legendre $P_\ell(x)$, $\ell = 1, 2, 3, 4$

Μετασχηματισμός αρτιότητας: Απ' τον ορισμό με τον τύπο του Rodriguez

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \ ,$$

βρίσκουμε ότι

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \ . \tag{40}$$

Ορθοκανονικότητα: Απ' τον ορισμό και με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_{-1}^{1} dx \ P_\ell(x) P'_\ell(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'} \ . \tag{41}$$

Απόδειξη: Με χρήση του τύπο του Rodriguez

$$\int_{-1}^{1} dx \ P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{1}{2^{\ell+\ell'}\ell!\ell'!}\int_{-1}^{1} dx \left[\frac{d^\ell (x^2-1)^\ell}{dx^\ell}\right]\left[\frac{d^{\ell'} (x^2-1)^{\ell'}}{dx^{\ell'}}\right]$$

$$= \quad \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+\ell'}\ell!\ell'!}\int_{-1}^{1} dx \ (x^2-1)^\ell \left[\frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}}(x^2-1)^{\ell'}\right] \ ,$$

όπου κάναμε ℓ ολοκληρώσεις κατά μέλη.

- Λόγω των $\ell+\ell'$ παραγώγων σε πολυώνυμο βαθμού $2\ell'$ πρέπει για μη μηδενικό αποτέλεσμα

$$\ell \leqslant \ell' \quad \text{και παρόμοια} \quad \ell' \leqslant \ell \ .$$

Άρα $\ell = \ell'$.

- Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^2(x) &= \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}(x^2-1)^\ell}{dx^{2\ell}} \\ &= \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell \ . \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell = \sqrt{\pi}\ \frac{(-1)^\ell \ell!}{\Gamma(\ell+3/2)} \ ,$$

βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^2(x) = \frac{2}{2\ell+1} \ .$$

Η σχέση πληρότητας: Αυτή γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)P_\ell(x)P_\ell(x') = \delta(x-x')\ . \tag{42}$$

Χρησιμοποιώντας την, οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ με $x \in [-1,1]$, αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)\ , \tag{43}$$

με

$$A_\ell = \left(\frac{\ell}{2}+1\right)\int_{-1}^{1} dx\ f(x)P_\ell(x)\ .$$

Ανάπτυξη σε πολυώνυμο: Απ' τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodrigues βρίσκουμε ότι

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\left(\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\right)^2 (x-1)^{\ell-k}(x+1)^k \ . \qquad (44)$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον τύπο πολλαπλής παραγώγισης γινομένου

$$\frac{d^\ell[f(x)g(x)]}{dx^\ell} = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\frac{d^k f(x)}{dx^k}\frac{d^{\ell-k}g(x)}{dx^{\ell-k}} \ ,$$

για $f(x) = (x-1)^\ell$ και $g(x) = (x+1)^\ell$ και επίσης ότι

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^\ell = \frac{\ell!}{(\ell-k)!}(x-1)^{\ell-k} \ , \qquad \frac{d^{\ell-k}}{dx^{\ell-k}}(x+1)^\ell = \frac{\ell!}{k!}(x+1)^k \ ,$$

αποδεικνύεται η (44) [Έλεγχος].

Η γεννήτρια συνάρτηση και η φυσική της σημασία: Ας θεωρήσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό μοναδιαίου φορτίου στη θέση $\mathbf{R} = (0,0,1)$. Για τυχαίο σημείο στο χώρο $\mathbf{r}$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\ . \quad (45)$$

Επικεντρώνοντας στον άξονα z με $\theta = 0$ (και επειδή $P_\ell(1) = 1$)

$$\frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)\ .$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος έχουμε:

- $r < 1:\quad \frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell \quad \Longrightarrow \quad A_\ell = 1, \quad B_\ell = 0\ ,$
- $r > 1:\quad \frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{-\ell-1} \quad \Longrightarrow \quad A_\ell = 0\ , \quad B_\ell = 1\ .$

- Το τελικό αποτέλεσμα για το δυναμικό είναι

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \ , \tag{46}$$

όπου $r_<$ ($r_>$) είναι το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των r και 1.
Ο συμβολισμός αυτός είναι συχνότατος στη Φυσική.

- Σε κάθε περίπτωση η σχέση αυτή γράφεται και ως

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1-2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} \ P_\ell(x) \ , \tag{47}$$

με $t = r$ ή $t = 1/r$, έτσι ώστε $t < 1$ και $x = \cos\theta$.

- Η ανάπτυξη αυτή ισχύει και για t μιγαδικό. Έτσι το αριστερό της μέλος αποτελεί τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre.

Αναδρομικές σχέσεις: Ο ορισμός και η γεννήτρια συνάρτηση οδηγούν σε διάφορες ταυτότητες και αναδρομικές σχέσεις. π.χ.

$$(2\ell+1)P_\ell(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) \ ,$$
$$(2\ell+1)xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) \ . \qquad (48)$$

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t

$$\frac{x-t}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_\ell(x) t^{\ell-1} \ .$$

Πολλαπλασιάζουμε με $2t$ και προσθέτουμε τη γεννήτρια

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(x) t^{\ell} \ .$$

Όμως απ' τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως προς x

$$\frac{t}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P'_\ell(x) t^{\ell} \ .$$

Διαιρώντας ή πολλαπλασιάζοντας με t, αλλάζοντας τον δείκτη άθροισης και αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell}[P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)] \ .$$

Εξισώνοντας, αποδεικνύεται η 1η εκ των (48).

Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους: Αποτελούν τη 2η ανεξάρτηση λύση της εξίσωσης Legendre και έχουν την μορφή

$$Q_\ell(x) = \frac{1}{2}P_\ell(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{m=1}^{\ell}\frac{1}{m}P_{m-1}(x)P_{\ell-m}(x)\ , \quad \ell = 0, 1, \ldots\ .$$

Τείνουν στο άπειρο στους πόλους της σφαίρας (για $x \to \pm 1$). Μερικές απ΄ τις $Q_\ell(x)$ χαμηλής τάξεως είναι:

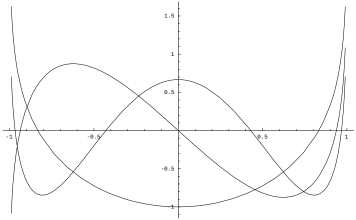
$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ , \\
Q_1(x) &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\ , \\
Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}\ . \\
Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

Οι $Q_\ell(x)$ είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες, $\int_{-1}^{1} dx\ Q_\ell^2(x) < \infty$.

Λόγω της συμπεριφοράς τους για $x = \pm 1$, οι συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ απορρίπτονται σε πολλές προβλήματα ως φυσικώς μη αποδεκτές. Όμως πρέπει να συμπεριληφθούν σε δύο γενικές περιπτώσεις:

- Οι πόλοι της σφαίρας δεν περιμβάνονται στο πεδίο ορισμού του φυσικού προβλήματος, δηλαδή $\theta_{\mathrm{min}} > 0$ και $\theta_{\mathrm{max}} < \pi$.
- Στους πόλους υπάρχει όρος πηγής ανάλογος της $\delta(\cos\theta \pm 1)$ ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση Laplace σε Poisson.

Συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ αναπαρίστανται γραφικά στο σχήμα



Σχήμα: Γραφικά των συναρτήσεων Legendre $Q_\ell(x)$, $n = 1, 2, 3$.

Οι συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ υπακούουν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις

Η γενική λύση του αξισυμμετρικού προβλήματος είναι

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) + \left(C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}} \right) Q_\ell(\cos\theta) \ . \tag{49}$$

- Οι 4 σταθερές ακολουθίες A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ και D_ℓ προσδιορίζονται απ΄ τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.
- Αν δεν υπάρχουν όροι πηγής και οι πόλοι της σφαίρας ανήκουν στο πεδίο ορισμού του προβλήματος τότε $C_\ell = D_\ell = 0$.
- Αν η αρχή των αξόνων $r = 0$ ή το $r = \infty$ περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού του προβλήματος, τότε οι σταθερές $B_\ell = D_\ell = 0$ και $A_\ell = C_\ell = 0$ (εκτός από $\ell = 0$), αντίστοιχα.

Σφαιρικές αρμονικές

Στην γενικότερη περίπτωση με $\nu \neq m \neq 0$, $\ell \geqslant 0$ και ακέραιους η ΔΕ

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\left(\ell(\ell+1)-\frac{\nu^2}{1-x^2}\right)\Theta=0\ ,$$

επιδέχεται ως λύσεις τις προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre.

- Για $m > 0$ ορίζονται ως

$$P_\ell^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}\ . \qquad (50)$$

- Για $m < 0$ οι αντικαθιστούμε $\dfrac{d}{dx} \to \displaystyle\int dx$.
  Όμως μπορεί να δειχθεί ότι

$$P_\ell^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x)\ , \qquad (51)$$

  οπότε δεν πρόκειται για ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Ορισμός: Οι σφαιρικές αρμονικές ορίζονται ως

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = A_{\ell,m} P_\ell^{|m|}(cos\theta) e^{im\phi} \ , \qquad -\ell \leqslant m \leqslant \ell \ , \tag{52}$$

όπου η σταθερά κανονικοποίησης είναι

$$A_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \ .$$

Αν $|m| > \ell$ τότε $Y_\ell^m = 0$.
Μερικές ιδιότητες είναι:

- Περιορισμός στον άξονα z.

$$Y_\ell^m(0,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \, \delta_{m,0} \ . \tag{53}$$

- Επίσης

$$Y_\ell^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \, P_\ell(\cos\theta) \ . \tag{54}$$

- Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν βάση της αναπαράστασης της ομάδας συμμετρίας $SU(2)$ με

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- Το μιγαδικό συζυγές είναι

$$[Y_\ell^m(\theta,\phi)]^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\phi) \ . \tag{55}$$

- Κάτω απ΄ το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$Y_\ell^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\phi) \ . \tag{56}$$

Ο λόγος είναι ότι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \ , \quad z = r\cos\theta \ ,$$

μετασχηματίζονται ως

$$(x,y,z) \to -(x,y,z) \ ,$$

όπως και αρμόζει σε μετασχηματισμό αρτιότητας.

Ορθοκανονικότητα και πληρότητα: Απ΄ τον ορισμό με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)]^* = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'} \; . \tag{57}$$

Η σχέση πληρότητας γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* = \frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta} \; . \tag{58}$$

Μια συνάρτηση $\Phi(\theta,\phi)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σφαιρικές αρμονικές ώς

$$\Phi(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta,\phi) \; . \tag{59}$$

Οι συντελεστές της ανάπτυξης είναι

$$A_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; \Phi(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta,\phi)]^* \; . \tag{60}$$

Προσθετικό θεώρημα: Για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει ότι

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ , \tag{61}$$

όπου

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \ . \tag{62}$$

Απόδειξη: Έστω δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ με σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,ϕ) και (r',θ',ϕ'), αντίστοιχα

$$\mathbf{x} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \ , \mathbf{x}' = r'(\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta') \ .$$

- Η μεταξύ τους γωνία είναι γ και δίνεται από την

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{rr'} \ .$$

  Το αποτέλεσμα είναι η (62).
- Χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη σε πολυώνυμα Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}\ P_\ell(\cos\gamma) \ ,$$

όπου $r_<$ ($r_>$) το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των r, r'

- Η ίδια ανάπτυξη πρέπει να παίρνει και τη μορφή

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ .$$

Οι σφαιρικές αρμονικές έχουν εισαχθεί ώστε να υπάρχει συμμετρία ως προς την εναλλαγή των γωνιών $(\theta,\phi) \leftrightarrow (\theta',\phi')$.

- Συγκρίνοντας έχουμε τη σχέση

$$P_\ell(\cos\gamma) = A_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ , \tag{63}$$

και πρέπει να προσδορίσουμε τις A_ℓ.

- Αν $\theta' = 0$, τότε $\gamma = \theta$, οπότε

$$P_\ell(\cos\theta) = A_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(0,\phi')]^* \ .$$

- Χρησιμοποιώντας τις (53) και (54), έχουμε

$$P_\ell(\cos\theta) = A_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) \implies A_\ell = \frac{4\pi}{2\ell+1} \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (63) προκύπτει η (61).

Γενική λύση εξίσωσης Laplace: Αν οι πόλοι για $\theta = 0, \pi$ είναι ομαλά σημεία στο φυσικό πρόβλημα που μελετούμε, η γενική λύση της εξίσωσης Laplace είναι

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell,m} r^\ell + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_\ell^m(\theta,\phi) \ . \qquad (64)$$

Αν οι πόλοι, είτε δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού, είτε αντιστοιχούν σε πηγές, τότε πρέπει να γράψουμε και όρους με τις προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre $Q_\ell^m(\theta,\phi)$.

Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi \tag{65}$$

και λύσεις της μορφής

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0\ , \quad k = \frac{\omega}{c}\ , \tag{66}$$

που είναι η εξίσωση Helmholtz. Θεωρώντας λύσεις της μορφής

$$\Psi(r,\theta,\phi,t) = e^{i\omega t}Y_\ell^m(\theta,\phi)\frac{R(r)}{\sqrt{r}}\ , \tag{67}$$

βρίσκουμε ότι η $R(r)$ υπακούει την εξίσωση Bessel [Άσκηση]

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{(\ell+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right)R = 0\ , \tag{68}$$

με δείκτη $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ (ημιακέραιος).

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ορίζονται ως

$$
\begin{aligned}
j_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \ , \\
n_\ell(x) &= (-1)^{\ell+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x) \ .
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Η γενική μορφή τους είναι

$$
\begin{aligned}
j_\ell(x) &= a_\ell(x)\sin x + b_\ell(x)\cos x \ , \\
n_\ell(x) &= -a_\ell(x)\cos x + b_\ell(x)\sin x \ ,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

- Τα a_ℓ και b_ℓ είναι πολυώνυμα δυνάμεων του $1/x$ τάξεως $\ell+1$ και ℓ, αντίστοιχα. Αυτό υπαγορεύεται απ΄ το γεγονός ότι $J_{1/2} \sim \sin x/\sqrt{x}$, $J_{-1/2} \sim \cos x/\sqrt{x}$.
- Η υψηλότερης τάξης $j_\ell(x)$ γεννώνται μέσω των αναδρομικών σχέσεων.

- Για $x \to 0$, οι j_ℓ είναι πεπερασμένες, ενώ οι n_ℓ τείνουν στο άπειρο.
- Μερικές σφαιρικές συναρτήσεις Bessel είναι οι:

$$j_0(x) = \frac{1}{x}\sin x \ ,$$
$$j_1(x) = \frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x \ ,$$
$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$$

και

$$n_0(x) = -\frac{1}{x}\cos x \ ,$$
$$n_1(x) = -\frac{1}{x^2}\cos x - \frac{1}{x}\sin x \ ,$$
$$n_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x \ .$$

Τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις Bessel:

Κατά αναλογία με τις συναρτήσεις $j_\ell(x)$ $n_\ell(x)$ ορίζουμε τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel ως:

- 1ου είδους

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x) = i^{-n} j_n(ix) \ . \tag{71}$$

- 2ου είδους

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x) = -i^n h_n^{(1)}(ix) \ , \tag{72}$$

  όπου $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x)$.

- Οι ιδιότητες και η συμπεριφορά των $i_\ell(x)$ και $k_\ell(x)$ βρίσκονται εύκολα μέσω της άμεσης σχέσης τους με τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο

Ας αναπτύξουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1\,, & 0 < x < 1 \\ -1\,, & -1 < x < 0 \end{array} \right\}\,, \tag{73}$$

σε σειρά πολυωνύμων Legendre.

- Γενικά έχουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,, \qquad a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} dx\ f(x) P_n(x)\,. \tag{74}$$

Στην περίπτωσή μας επειδή $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ έχουμε

$$a_n = (2n+1)\int_0^1 dx\ P_n(x)\,, \qquad n = 1, 3, 5\ldots\,,$$

και μηδέν εάν n είναι άρτιος.

- Απ' τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \ ,$$

παίρνουμε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 dx\ P_n(x) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t-1}{t}$$
$$= \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2n!\ \Gamma(3/2-n)}\ t^{2n-1} \ ,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάπτυξη σε σειρά Taylor

$$(1+z)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q+1-n)} z^n \ ,$$

για $q = \frac{1}{2}$ και $z = t^2$.
Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

- Συγκρίνοντας παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 dx\, P_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\pi}}{2k!\,\Gamma(3/2-k)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!} \ , & n = 2k-1 \\ 1 \ , & n = 0 \\ 0 \ , & n = 2k \end{array} \right\} ,$$

όπου έχουμε το συμβολισμό

$$n!! = \left\{ \begin{array}{ll} 1\cdot 3\cdots(2k+1) \ , & n = 2k+1 \\ 2\cdot 4\cdots(2k) \ , & n = 2k \end{array} \right\} .$$

- Άρα οι μη μηδενικοί συντελεστές της ανάπτυξης (74) σε σειρά πολυωνύμων Legendre είναι

$$a_{2k-1} = (4k-1)\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!} \ , \qquad k = 1, 2, \dots \ .$$

Παράδειγμα 2ο

Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre ας υπολογίσουμε την άπειρη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\, P_n(x)\ . \tag{75}$$

- Ολοκληρώνουμε ως προς t την γεννήτρια συνάρτηση και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\, P_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ .\end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 3ο

Ας υπολογίσουμε τη σταθερά

$$\left.\frac{dP_n(x)}{dx}\right|_{x=1} \equiv P_n'(1) = \frac{1}{2}n(n+1) \ , \tag{76}$$

με τους ακόλουθους τρόπους:

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues' και παραγωγίζοντας ως προς x

$$P_n'(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] \ .$$

Οι μη μηδενικές συνεισφορές για $x=1$ προέρχονται όταν n παράγωγοι αναγκαστικά να δρούν πάνω στον όρο $(x-1)^n$ και μία στον όρο $(x+1)^n$.
Υπάρχουν $n+1$ τέτοιες δυνατότητες, οπότε

$$P_n'(1) = \frac{n+1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\right]_{x=1}\left[\frac{d}{dx}(x+1)^n\right]_{x=1} = \frac{1}{2}n(n+1) \, .$$

- Απ΄ τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως x παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x) = \frac{t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} \ ,$$

οπότε για $t < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(1) t^n = \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{t}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\ t^n \ .$$

Συγκρίνοντας, αποδεικνύεται η (76).

Παράδειγμα 4ο

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues ας αποδείξουμε ότι

$$I_n[f] = \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}f(x)dx \ . \qquad (77)$$

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)d\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right) \ . \end{aligned}$$

- Ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} \\ &\quad -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \ . \end{aligned}$$

- Ο πρώτος όρος μηδενίζετε και έτσι έχουμε

$$I_n[f] = \frac{(-1)}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \,.$$

- Είναι φανερό ότι μετά από n κατά παράγοντες ολοκληρώσεις, καταλήγουμε στο

$$I_n[f] = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx \ ,$$

  που είναι το ζητούμενο.

Ως εφαρμογή του προηγουμένου συμπεράσματος θέτουμε, $f(x) = x^m$, και χρησιμοποιούμε ότι

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0 \ , \qquad \text{για} \quad m < n \ .$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$I_{m,n} = I_n[x^m] = \int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0 \ , \qquad \text{για} \quad m < n \ . \qquad (78)$$

ΓΕΝΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Διαφορετικά είδη ορθογωνίων πολυωνύμων μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά. Είναι προτιμότερο λοιπόν να αναπτύξουμε γενικότερα τη σχετική θεωρία.

- Θεωρούμε τη μεταβλητή $x \in [a, b]$ και τη λεγόμενη συνάρτηση βάρους $h(x) \geqslant 0, \ \forall \ x \in [a, b]$.
- Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx \ h(x) f(x) g(x) \ , \tag{79}$$

  για δύο συναρτήσεις f και g.
- Μέσω αυτού ορίζεται το μέτρο της συνάρτησης f

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} > 0 \ . \tag{80}$$

  Παρατηρούμε ότι εξ΄ ορισμού $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- Με τους παραπάνω ορισμούς

$$\|1\| = \sqrt{\int_a^b dx \ h(x)} < \infty \quad (\text{απαιτείται σύγκλιση}) \ . \tag{81}$$

Μέθοδος κατασκευής και ιδιότητες

Η φυσική βάση πολυωνύμων έως τάξη n, είναι τα $1, x, \ldots, x^n$. Με τη μέθοδο των Gram–Schmidt κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση πολυωνύμων $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

- Ορίζουμε το πρώτο πολυώνυμο της σειράς ως

$$P_0(x) = \frac{\mathcal{N}_0^{1/2}}{\|1\|} \ . \tag{82}$$

- Τα μεγαλύτερης τάξης πολυώνυμα ορίζονται απ′ την αναδρομική σχέση

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{\langle P_m, xP_n \rangle}{\mathcal{N}_m} P_m(x) \ , \tag{83}$$

  όπου $\mathcal{N}_n$ σταθερές κανονικοποίησης.

- Εκ′ κατασκευής

$$\langle P_n, P_m \rangle = \mathcal{N}_n \delta_{n,m} \tag{84}$$

  και επίσης ότι $P_n(x)$ είναι όντως τάξης n πολυώνυμα.

Αναδρομική σχέση: Τα πολυώνυμα υπακούουν αναδρομική σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + C_n P_{n-1}(x) \ , \tag{85}$$

με

$$C_n = \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{N}_{n-1}} B_{n-1} \ . \tag{86}$$

Απόδειξη: Εν γένει θα έχουμε μια σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} P_m(x) \ .$$

- Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το P_ℓ έχουμε

$$\langle P_\ell, xP_n \rangle = \mathcal{N}_\ell \left(A_n \delta_{n,\ell} + B_n \delta_{n,\ell-1} + C_{n,\ell} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m,\ell} \right) \ .$$

- Όμως ισχύει ότι

$$\langle P_\ell, xP_n\rangle = \langle P_n, xP_\ell\rangle = \mathcal{N}_n \left(A_\ell \delta_{n,\ell} + B_\ell \delta_{\ell,n-1} + C_{\ell,n} \sum_{m=0}^{\ell-1} \delta_{m,n} \right) .$$

- Εξειδικεύοντας την παραπάνω

$$\ell = n+1: \qquad \mathcal{N}_{n+1} B_n = C_{n+1,n}\mathcal{N}_n \quad \Longrightarrow \quad C_{n+1,n} = \frac{\mathcal{N}_{n+1}}{\mathcal{N}_n} B_n$$

$$\ell \geqslant n+2: \qquad 0 = C_{\ell,n}\mathcal{N}_n \quad \Longrightarrow \quad C_{\ell,n} = 0 \ .$$

Η (85) αποδεικνύεται θέτοντας τη σταθερά $C_n = C_{n,n-1}$.

Σχέσεις μεταξύ σταθερών: Οι σταθερές A_n, B_n και C_n στην αναδρομική σχέση (85) σχετίζονται με τους τρείς υψηλότερης τάξης όρους του πολυωνύμου $P_n(x)$. Έστω ότι

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \gamma_{n-2} x^{n-2} + \cdots \ . \tag{87}$$

Αντικαθιστώντας και εξισώνοντας τους όρους τάξεως x^{n+1}, x^n και x^{n-1} παίρνουμε 3 εξισώσεις για τις A_n, B_n και C_n [Άσκηση]

$$\alpha_n = B_n \alpha_{n+1} \ , \ \beta_{n-1} = A_n \alpha_n + B_n \beta_n \ , \ \gamma_{n-2} = A_n \beta_{n-1} + B_n \gamma_{n-1} + C_n \alpha_{n-1}$$

με λύση

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_{n+1}\beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_n \alpha_{n+1}} \ , \\ B_n &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \ , \\ C_n &= \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n-2} - \alpha_n \gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}\beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n \alpha_{n+1}} \beta_{n-1} \ . \end{aligned} \tag{89}$$

Απ' την (86) βρίσκουμε το λόγο $\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n-1}$ και τη σταθερά κανονικοποίησης $\mathcal{N}_n$ (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθ.)

Ο τύπος των Darboux–Christoffel: Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \ . \tag{90}$$

Αυτός μπορεί να εννοηθεί και ως μια ατελής μορφή της σχέσης πληρότητας.
Αυτή ισχύει πραγματικά μόνο στο όριο $n \longrightarrow \infty$.

Στην περίπτωση που $x = y$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{[P_k(x)]^2}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} \left(P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)\right) \ . \tag{91}$$

Πολυωνυμικές Ρίζες: Ένα τυχαίο πολυώνυμο έχει πραγματικές και μιγαδικές ρίζες ακόμα και αν συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
Όμως για τα ορθογώνια πολυώνυμα όπως τα έχουμε ορίσει μπορεί να αποδειχθεί ότι:

- Όλες οι ρίζες ενός πολυωνύμου $P_n(x)$ είναι πραγματικές, διακριτές και εντός του πεδίου ορισμού του, $x \in [a, b]$.
- Οι ρίζες του $P_n(x)$ είναι μεταξύ αυτών του αμέσως μεγαλυτέρου σε τάξη $P_{n+1}(x)$.

π.χ. Για τα πολυώνυμα Legendre

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x = -0.775, 0, 0.775 \ .$$

και

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} = 0 \;\Rightarrow\; x = -0.861, -0.340, 0.340, 0.861 \ ,$$

τα παραπάνω επαληθεύονται

Ορθογώνια πολυώνυμα και ΔΕ

Υπό συγκεκριμένες συνθήκες ΔΕ του τύπου Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\Phi(x)}{dx}\right) + Eh(x)\Phi(x) = 0 \ , \tag{92}$$

έχουν ώς ειδικές λύσεις ορθογώνια πολυώνυμα με συνάρτηση βάρους $h(x)$. Ορίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις

$$Q = f/h \ , \quad L = f'/h \quad \Longleftrightarrow \quad f = e^{\int dx L/Q} \ , \quad h = \frac{1}{Q}e^{\int dx L/Q} \ ,$$

οπότε η ΔΕ γράφεται ως

$$Q\Phi'' + L\Phi' + E\Phi = 0 \ . \tag{93}$$

Μια αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις είναι

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \ , \qquad L(x) = \gamma x + \delta \ ,$$

δηλαδή να είναι τετραγωνική και γραμμική συνάρτηση, αντίστοιχα.

Περαιτέρω διακρίνουμε:

- Οι σταθερές $a \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και έχουν το ίδιο πρόσημο. Οι ρίζες της $Q(x) = 0$ είναι πραγματικές και διακριτές και η ρίζα της $L(x) = 0$ βρίσκεται μεταξύ των.
  π.χ. τα πολυώνυμα Legendre και οι γενικεύσεις τους τα πολυώνυμα Jacobi.
- Οι σταθερές $a = 0$, $b \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και οι ρίζες των $Q(x) = 0$ και $L(x) = 0$ είναι διαφορετικές. Το πρόσημο των b και α είναι ίδιο ή αντίθετο ανάλογα με το αν ρίζα της $Q(x) = 0$ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απ' τη ρίζα της $L(x) = 0$.
  π.χ. τα πολυώνυμα Laguerre.
- Οι σταθερές $a = b = 0$, $\gamma \neq 0$ και c και γ έχουν αντίθετα πρόσημα.
  π.χ. τα πολυώνυμα Hermite.

Η συνάρτηση Bessel δεν ανήκει σε καμμία απ' τις ανωτέρω κατηγορίες και δεν έχει πολυωνυμικές λύσεις.

Τύπος του Rodrigues: Ορίζουμε τα γενικευμένα πολυώνυμα

$$P_n(x) = \frac{\mathcal{M}_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big(h(x) [Q(x)]^n \Big) , \tag{94}$$

όπου η σταθερά αναλογίας $\mathcal{M}_n$ σχετίζεται με την σταθερά κανονικοποίησης του εσωτερικού γινομένου $\mathcal{N}_n$.

Κβάντωση της ιδιοτιμής E: Απαιτώντας τα πολυώνυμα όπως ορίσθηκαν μέσω του τύπου του Rodrigues να ικανοποιούν τη ΔΕ, βρίσκουμε ότι

$$E_n = -n \left[a(n-1) + \gamma \right] , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \; . \tag{95}$$

Ο συντομότερος τρόπος να δειχθεί η παραπάνω κβάντωση της σταθεράς E, είναι να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε πολυωνυμική λύση της μορφής $\Psi = a_k x^k + \cdots + a_m x^m$, τότε:

- ο όρος ανώτερης τάξης θα ικανοποιεί την

$$\left(ax^2\frac{d^2}{dx^2} + \gamma x\frac{d}{dx} + E\right)x^k = 0 \implies ak(k-1) + \gamma k + E = 0 \ ,$$

  με λύση

$$k = \frac{a - \gamma \pm \sqrt{(a-\gamma)^2 - 4aE}}{2a} \ .$$

- Αντίστοιχα για τον όρο κατώτερης τάξης θα έχουμε

$$c\frac{d^2}{dx^2}x^m = 0 \quad \implies \quad m = 0 \ .$$

- Επειδή η λύση είναι πολυωνυμική θα πρέπει η διαφορά $k - m$ να είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος $n = 0, 1, \ldots$. Επιλύοντας για την E βρίσκουμε την (95).

Πολυώνυμα *Jacobi*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Jacobi

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + Ey = 0 \ , \quad x \in [-1,1] \ . \quad (96)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2 \ , \quad L(x) = \beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x \ ,$$

απ΄ τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta} \ , \quad h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \ ,$$

με τις οποίες η (96) γράφεται στη μορφή Sturm–Liouville. Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha, \beta > -1$ για να συγκλίνει το $\int_{-1}^{1} dx \ h(x)$ και

$$E = E_n = n(n+\alpha+\beta+1) \ , \qquad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Ορισμός των πολυωνύμων Jacobi απ' τον τύπο του Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] . \tag{97}$$

- Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\begin{pmatrix} n+\alpha \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\beta \\ n-m \end{pmatrix}(x-1)^{n-m}(x+1)^m .$$

- Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε τη σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \mathcal{N}_n\ \delta_{n,m} ,$$

με τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1+n)2^{\alpha+\beta+1+n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+1+n)(\alpha+\beta+2+2n)} .$$

Μερικές ιδιότητες είναι:

- Ιδιότητα παραγώγισης

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x) \ ,$$

  δηλαδή η παράγωγος μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά $((\alpha,\beta) \longrightarrow (\alpha+k,\beta+k))$ πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους $(n \longrightarrow n-k)$.

- Αναδρομική σχέση στην τάξη n

$$\begin{aligned}
&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&= [(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)+(2n+\alpha+\beta)_3 x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),
\end{aligned}$$

  όπου $(m)_n$ είναι το σύμβολο Polheimer

$$(m)_n = m(m+1)\ldots(m+n-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} \ .$$

- Αναδρομική σχέση στους δείκτες (α, β)

$$P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{1-x} .$$

- Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-t+R)^{-\alpha} (1+t+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n , \quad (98)$$

όπου

$$R = \sqrt{1-2xt+t^2} .$$

- Εύκολα αποδεικνύεται ο μετασχηματισμός αρτιότητας

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x) . \quad (99)$$

- Τα πολυώνυμα Legendre είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi όταν $\alpha = \beta = 0$, δηλαδή

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) .$$

Όλες οι σχέσεις για τα πολυώνυμα Legendre προκύπτουν από αντίστοιχες των πολυωνύμων Jacobi [Άσκηση]

Πολυώνυμα *Gegenbauer*

Αυτά αποτελούν ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με $\alpha = \beta \to \alpha - 1/2$ και ορίζονται ως

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n)\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + n + 1/2)}\ P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}(x)\ . \qquad (100)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + Ey = 0\ , \quad x \in [-1, 1]\ . \qquad (101)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2\ , \quad L(x) = -(2\alpha + 1)x\ ,$$

απ' τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2}\ , \quad h(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}\ .$$

- Για πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha > -1/2$ ώστε να συγκλίνει το $\int_{-1}^{1} dx\ h(x)$ και

$$E = E_n = n(n + 2\alpha)\ , \qquad n = 0, 1, \dots\ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\frac{1}{(1 - 2tx + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) t^n\ . \tag{102}$$

  - Για $\alpha = 1/2$ παίρνουμε τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$.
  - Για $\alpha = 1$ παίρνουμε τα πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους $U_n(x)$.

- Απ′ τη γεννήτρια συνάρτηση έχουμε για το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$C_n^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\alpha)}(x)\ . \tag{103}$$

- Ιδιότητα για την παράγωγο

$$C_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{2\alpha} \frac{dC_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx} ,$$

δηλαδή η παράγωγος δίνει μας μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά ($\alpha \rightarrow \alpha + 1$) πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους ($n + 1 \rightarrow n$).

- Πιό γενικά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$C_n^{(\alpha+m)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2^m \Gamma(\alpha + m)} \frac{d^m C_{n+m}^{(\alpha)}(x)}{dx^m} ,$$

- Αναδρομική σχέση

$$(n+1) C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 2(n+\alpha) x C_n^{(\alpha)}(x) - (n + 2\alpha - 1) C_{n-1}^{(\alpha)}(x) .$$

Αυτή μπορεί να αποδειχθεί με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Gegenbauer

$$
\begin{aligned}
C_1^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha x \ , \\
C_2^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha(\alpha+1)x^2 - \alpha \ , \\
C_3^{(\alpha)}(x) &= \frac{4}{3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x^3 - 2\alpha(\alpha+1)x \ , \\
C_4^{(\alpha)}(x) &= \frac{2}{3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)x^4 - 2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x^2 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) \ .
\end{aligned}
$$

Πολυώνυμα *Hermite*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Hermite

$$y'' - 2xy' + Ey = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty. \tag{104}$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 \ , \quad L(x) = -2x \ ,$$

απ΄ τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = h(x) = e^{-2\int dx x} = e^{-x^2} \ .$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει

$$E = E_n = 2n \ , \qquad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Το πολυώνυμα Hermite παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Hermite είναι

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) . \tag{105}$$

Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m 2^{n-2m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= 2^n x^n - 2^{n-2} n(n-1) x^{n-2} + \ldots \ . \end{aligned} \tag{106}$$

Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε από τη γενική θεωρία για την σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\pi} 2^n n! \ ,$$

στις σχέσεις ορθοκανονικότητας

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \ \delta_{n,m} \tag{107}$$

και πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} = e^{x^2} \delta(x-y) \ . \tag{108}$$

Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \implies a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} f(x) H_n(x)\ . \tag{109}$$

Μετασχηματισμός αρτιότητας: Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)\ . \tag{110}$$

Γεννήτρια συνάρτηση: Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n\ . \tag{111}$$

Αναδρομικές σχέσεις: Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x) \ , \\
2xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \ .
\end{aligned}
$$

Μπορεί να επαληθευθεί η 2η εκ των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (106) [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Hermite

$$
\begin{aligned}
H_1(x) &= 2x \ , \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2 \ , \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x \ , \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \ .
\end{aligned}
$$

Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να ενεγχθούν με χρήση αυτών των πολυωνύμων.

Πολυώνυμα *Laguerre*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Laguerre

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + Ey = 0 \ , \qquad 0 \leqslant x < \infty. \tag{112}$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = x \ , \quad L(x) = \alpha + 1 - x \ ,$$

απ' τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = x^{\alpha+1}e^{-x} \ , \qquad h(x) = x^{\alpha}e^{-x} \ .$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha > -1$ καθώς και

$$E = E_n = n \ , \qquad n = 0, 1, \dots \ .$$

Το πολυώνυμα Laguerre παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του ατόμου του υδρογόνου στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

- Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Laguerre είναι

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha} \right) . \tag{113}$$

- Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+\alpha)!}{(n-m)!(m+\alpha)!} \frac{x^m}{m!} . \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} x^n - (-1)^n \frac{n+\alpha}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &\quad +(-1)^n \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{2(n-2)!} x^{n-2} + \dots . \end{aligned} \tag{114}$$

- Έχουμε απ' τη γενική θεωρία για τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)} .$$

- Σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_0^\infty dx\, x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)} \delta_{n,m} \tag{115}$$

- Σχέση πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y) = x^{-\alpha} e^{x} \delta(x-y) \ . \tag{116}$$

- Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{\alpha}(x) \ , \tag{117}$$

με τους συντελεστές να δίνονται απ΄ την

$$a_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^{\infty} dx \ x^{\alpha} e^{-x} f(x) L_n^{\alpha}(x) \ .$$

- Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται η γεννήτρια συνάρτηση

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{tx}{t-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n\ . \qquad (118)$$

- Αναδρομικές σχέσεις: Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης μπορούν να δειχθούν οι

$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}-\frac{dL_{n+1}^{\alpha}(x)}{dx}=L_n^{\alpha}(x)\ ,$$
$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\ ,$$
$$xL_n^{\alpha}(x)=-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)+(2n+\alpha+1)L_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)\ .$$

Ως [Άσκηση] επαληθεύστε την 3η των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (114).

- Σημειώνω επίσης την ενδιαφέρουσα αναδρομική σχέση

$$\sum_{m=0}^{n}L_m^{k}(x)=L_n^{k+1}(x)\ . \qquad (119)$$

Οριακές περιπτώσεις: Ισχύουν τα ακόλουθα όρια για τα πολυώνυμα Laguerre:

Σχέση με τα πολυώνυμα Jacobi

$$L_n^\alpha(x) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - 2\frac{x}{\beta}\right) . \qquad (120)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ΔΕ Jacobi

$$(1-z^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)z)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 .$$

- Αντικαθιστούμε $z = 1 - 2x/\beta$ διαιρούμε με β και παίρνουμε

  $$\left(x - \frac{x^2}{\beta}\right) y'' + \left(1 + \alpha - \frac{\alpha+2+\beta}{\beta}x\right) y' + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{\beta} y = 0 ,$$

  όπου η παράγωγος είναι ως προς x.
- Στο όριο $\beta \to \infty$ αυτή γίνεται η (112) η ΔΕ των πολυωνύμων Lagguerre. Επίσης $0 \leqslant x < \infty$.
- Άρα η σχέση (120) ισχύει εκτός ίσως από μιά πολλαπλασιαστική σταθερά.

- Θεωρούμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{\alpha+n}(1+z)^{\beta+n}\right] .$$

Αντικαθιστώντας $z = 1 - 2x/\beta$ και χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{\beta+n} = e^{-x} , \qquad \lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-\beta} = e^{x} ,$$

βρισκουμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Laguerre (113) και αποδεικνύεται η (120).

Σχέση με τις συναρτήσεις Bessel

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}L_n^{\alpha}\left(\frac{x}{n}\right)\right] = x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x}) . \qquad (121)$$

Απόδειξη: Αντικαθιστούμε στην (114) $x \to x/n$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$(n+a)! \simeq e^{-n}n^{n+a} ,$$

βρίσκουμε ότι για $n \gg 1$

$$L_n^{\alpha}\left(\frac{x}{n}\right) \simeq n^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{(m+\alpha)!m!} = n^{\alpha}x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x}) .$$

Μερικά πολυώνυμα Laguerre:

$$
\begin{aligned}
L_1^{(\alpha)}(x) &= 1+\alpha-x\ , \\
L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^2}{2}-(\alpha+2)\ x+\frac{\alpha^2+3\alpha+2}{2}\ , \\
L_3^{(\alpha)}(x) &= -\frac{x^3}{6}+\frac{\alpha+3}{2}\ x^2-\frac{\alpha^2+5\alpha+6}{2}\ x+\frac{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}{6}\ .
\end{aligned}
$$

Πολυώνυμα Chebyshev

Τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους $T_n(x)$ είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με $\alpha = \beta = -1/2$

$$T_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) \ . \tag{122}$$

- Η αντίστοιχη ΔΕ εξίσωση είναι

  $$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \ , \quad n = 0, 1, \ldots \ , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \ ,$$

  απ΄ την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

  $$f(x) = (1-x^2)^{1/2} \ , \qquad h(x) = (1-x^2)^{-1/2} \ , \tag{123}$$

  της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

- Η παραπάνω ΔΕ έχει ως 2η ανεξάρτητη λύση τις συναρτήσεις $\sqrt{1-x^2}U_n(x)$, όπου $U_n(x)$ τα πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους.
- Τα πολυώνυμα $U_n(x)$ υπακούουν επίσης τη ΔΕ

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\,, \tag{124}$$

απ΄ την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = (1-x^2)^{3/2}\,, \qquad h(x) = (1-x^2)^{1/2}\,. \tag{125}$$

της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

Τύπος του Rodriguez: Έχουμε

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right] \tag{126}$$

και

$$U_n(x) = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}(2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\right] \ . \tag{127}$$

Γεννήτριες συναρτήσεις: Έχουμε

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n \ , \tag{128}$$

και

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \ . \tag{129}$$

Μερικά από τα πολυώνυμα Chebyshev είναι:

$$T_0(x) = 1\ , \quad T_1(x) = x\ , \quad T_2(x) = -1 + 2x^2\ , \quad T_3(x) = -3x + 4x^3\ ,$$
$$U_0(x) = 1\ , \quad U_1(x) = 2x\ , \quad U_2(x) = -1 + 4x^2\ , \quad U_3(x) = -4x + 8x^3$$

Σχέση με τριγωνομετρικές συναρτήσεις: Ορίζουμε τη γωνία

$$\theta = \cos^{-1} x\ , \qquad \theta \in [0, \pi]\ .$$

- Για τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους ισχύει ότι

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n\theta) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \binom{n}{2m} x^{n-2m}(1-x^2)^m\ . \\ &= 2^{n-1}x^n - 2^{n-3}nx^{n-2} + \ldots\ . \end{aligned} \tag{130}$$

- Με χρήση στοιχειώδους τριγωνομετρίας αποδεικνύεται ότι

$$T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x) = T_{mn}(x)\ . \tag{131}$$

- Παρομοίως για πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους ισχύει ότι

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \begin{pmatrix} n+1 \\ 2m+1 \end{pmatrix} x^{n-2m}(1-x^2)^m \\ &= 2^n x^n - 2^{n-2}(n-1)x^{n-2} + \dots\ . \end{aligned} \tag{132}$$

- Επειδή

$$\theta(x) = \cos^{-1} x \quad \Longrightarrow \quad \theta'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sin\theta}\ ,$$

έχουμε την ταυτότητα

$$T_n'(x) = nU_{n-1}(x)\ , \qquad U_n'(x) = 2C_{n-1}^{(2)}(x)\ , \tag{133}$$

όπου $C_n^{(\alpha)}(x)$ το πολυώνυμο Gegenbauer.

Η συμπλήρωση των αναγκαίων βημάτων προς απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων αφήνεται ως [Άσκηση].

Αναδρομικές σχέσεις: Είτε μέσω της γεννήτριας συνάρτησης, είτε με την παραπάνω ανάπτυξη και τη γενική θεωρία

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \ ,$$

με μια ίδια σχέση για για τα $U_n(x)$ [Άσκηση]. Επίσης από τριγωνομετρικές ταυτότητες βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x) \ , \\ (1-x^2)U_{n-1}(x) &= xT_n(x) - T_{n+1}(x) \ . \end{aligned}$$

Σταθερά κανονικοποίησης: Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή $\theta = \cos^{-1} x$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) = \mathcal{N}_n \ \delta_{n,m} \ , \qquad \mathcal{N}_0 = \pi \ , \quad \mathcal{N}_{n\geqslant 1} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$\int_{-1}^{1} dx \ \sqrt{1-x^2} \ U_n(x) U_m(x) = \mathcal{N}_n \ \delta_{n,m} \ , \qquad \mathcal{N}_n = \frac{\pi}{2} \ .$$

Εκτός απ' τη χρήση τους σε θεωρητικά προβλήματα, τα πολυώνυμα Chebyshev είναι χρησιμότατα και στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων γιατί έχουν εν γένει γρηγορότερες

Υπεργεωμετρική εξίσωση και υπεργεωμετρική συνάρτηση

Τα παραπάνω ορθογώνια πολυώνυμα και οι ΔΕ που υπακούουν αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της υπεργεωμετρικής εξίσωσης

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0\ , \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \quad (134)$$

και των λύσεων της

- Απ΄ τη γενική θεωρία των ΔΕ 2ης τάξης αυτή έχει τρία συνήθη ανώμαλα σημεία στα $x = 0, 1$ και ∞.
  Απόδειξη: Η ΔΕ (134) είναι της μορφής

  $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0\ .$$

  με

  $$p(x) = \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\ , \qquad q(x) = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}$$

- Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x\to 1} (x-1)p(x) = \alpha+\beta+1-\gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 1} (x-1)^2 q(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x\to \infty} xp(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to \infty} x^2 q(x) = 0 \ ,$$

  που αποδεικνύουν το ζητούμενο.

Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά: Αναπτύσσοντας γύρω απ΄ το σημείο $x = 0$ σε δυναμοσειρά

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad (135)$$

παίρνουμε την αναδρομική σχέση [Άσκηση]

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} \ a_n .$$

- Επιλύοντάς τη [Άσκηση] βρίσκουμε τη 1η ανεξάρτητη λύση

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) \ , \tag{136}$$

όπου

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n \ , \tag{137}$$

είναι η Υπεργεωμετρική συνάρτηση.

  - Η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1 \ .$$

  - Ισχύει η ιδιότητα συμμετρίας

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = {}_2F_1(\beta, \alpha, \gamma, x) \ .$$

Η 2η ανεξάρτητη λύση βρίσκεται με ανάπτυξη της μορφής

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ . \tag{138}$$

Αυτή μέσω της υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \ . \tag{139}$$

Παρατηρήσεις:

- Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στα σημεία $x = 0, 1$ και ∞ είναι: $(0, 1-\gamma)$, $(0, \gamma-\alpha-\beta)$ και (α, β), αντίστοιχα [Άσκηση].
- Αν είτε η παράμετρος α είτε η β ισούται με αρνητικό ακέραιο $-n$, η Υπεργεωμετρική συνάρτηση είναι απλά ένα πολυώνυμο τάξεως n.
  Συγκεκριμένες σχέσεις με τα ειδικά πολυώνυμα που έχουμε μελετήσει θα δοθούν αργότερα.
- Η παραπάνω λύση δεν ισχύει για όλες τις τιμές των σταθερών α, β και γ. Ήδη απ' τον ορισμό αν $\gamma = -n$, $n = 0, 1, \ldots$ η ανάπτυξη σε σειρά δεν είναι καλώς ορισμένη. Σημειώστε επίσης την ιδιότητα

$$
{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \, .
$$

  Αν $\gamma = -n$ ή $\gamma - \alpha - \beta = -n$, $n = 0, 1, \ldots$, τότε η ανάπτυξη σε σειρά (137) δεν ισχύει.

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 dt\; t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha} \,, \quad \mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\beta) > 0 \,, \tag{140}
$$

καθώς και μια αντίστοιχη αναπαράσταση με $\alpha \longleftrightarrow \beta$.
Μετασχηματισμοί και αναλυτική επέκταση: Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ολοκληρωτική αναπαράσταση μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x) \,,
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-b)}\,{}_2F_1(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x) \\
&+(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x) \,,
\end{aligned}
$$

Αυτοί και άλλοι παρόμοιοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν την περιοχή εντός του μοναδιαίου δίσκου στον εαυτό της.

Άλλοι μετασχηματισμοί όπως ο

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\, x^{-\alpha} \\
&\quad \times\, {}_2F_1(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1-1/x) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\, x^{\alpha-\gamma} \\
&\quad \times\, {}_2F_1(\gamma-\alpha,1-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-1/x)
\end{aligned}
$$

απεικονίζουν το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου στο εξωτερικό του και αντιστρόφως.

Οι παραπάνω σχέσεις είναι μετασχηματισμοί αναλυτικής επέκτασης.

Περιπτώσεις όπου $\gamma = \alpha + \beta + m$ ή $\beta = \alpha + m$, $m \in \mathbb{Z}$: Στις περιπτώσεις αυτές η Υπεργεωμετρική συνάρτηση δεν είναι πια αναλυτική στη γειτονιά του $x = 1$ και του $x = 0$ αλλά έχει μια καλώς ορισμένη έκφραση που δεν θα αποτυπώσουμε εδώ.

Απ΄ τα προηγούμενα είναι προφανές ότι οι λύσεις εξαρτώνται απ΄ τις σταθερές α, β και γ. Προσεκτική ανάλυση οδηγεί σε διάφορες περιπτώσεις:

- Ουδεμία απ΄ τις γ, $\gamma - \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος. Τότε οι δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι:

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \chi, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) $$

  και

$$ \begin{aligned} & x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ & \qquad = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) \end{aligned} $$

- Μία εκ΄ των γ, $\gamma - \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος. Τότε μια εκ΄ των παραπάνω ανεξάρτητων λύσεων τερματίζεται και η αντίστοιχη λύση είναι της μορφής

$$ x^a(1-x)^b P_n(x) \ , \tag{141} $$

  όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n.

Συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση και συνάρτηση

Η συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \ , \qquad \alpha, \gamma \in \mathbb{C} \ . \tag{142}$$

αποτελεί οριακή περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στο όριο $\beta \to \infty$ ως εξής (οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση]):

- Πρώτα στην υπεργεωμετρική εξίσωση

  $$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0 \ ,$$

  θέτουμε $z = x/\beta$.
- Μετά παίρνουμε το όριο $\beta \to \infty$.

Η ΔΕ (142) είναι της μορφής

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \ .$$

με

$$p(x) = \frac{\gamma - x}{x} \ , \qquad q(x) = -\frac{\alpha}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0 \; ,$$

$$\lim_{x\to \infty} xp(x) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to \infty} x^2 q(x) = \infty \; (\text{στο μιγαδικό επίπεδο}) \; ,$$

που αποδεικνύουν ότι:

- Το $x = 0$ είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο (με χαρακτηριστικούς εκθέτες $\rho = 0$ και $1 - \gamma$ [Άσκηση])
- Το $x = \infty$ είναι ουσιώδες ανωμαλό σημείο.

Λύσεις και συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση: Παίρνοντας το παραπάνω όριο $\beta \to \infty$ βρίσκουμε ότι το όριο την Υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι καλώς ορισμένο.
Απόδειξη: Απ' την αναπαράσταση σε σειρά της υπεργεωμετρικής συνάρτησης

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n , $$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling για $\beta \gg 1$

$$ \Gamma(\beta+n) \simeq e^{-\beta}\beta^{\beta+n} , $$

βρίσκουμε ότι στο όριο $\beta \to \infty$ παίρνουμε

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma,x) = \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!} x^n \qquad (143) $$

και εξ' ορισμού είναι η συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση.

- Η απειροσειρά εκφυλίζεται σε πολυώνυμο αν $a = -n$, $n = 0, 1, \ldots$.
- Οι ανεξάρτητες λύσεις της (142) είναι οι

$$y_1(x) = {}_1F_1(\alpha, \gamma, x) \ , \qquad y_2(x) = x^{1-\gamma}{}_1F_1(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \ . \tag{144}$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Στο ίδιο όριο βρίσκουμε ότι

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dt\ e^{xt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} \ . \tag{145}$$

Απόδειξη: Απ′ τη σχέση

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt\ t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1 - tx/\beta)^{-\beta} \ , \tag{146}$$

τον τύπο του Stirling και το όριο

$$\lim_{\beta\to\infty} (1 - tx/\beta)^{-\beta} = e^{xt} \ , \tag{147}$$

Διάφορες συναρτησιακές σχέσεις:

- Απ΄ την ολοκληρωτική αναπαράσταση ή χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο

$$ {}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = e^x {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, -x) \ , $$

η οποία συνδέει τις συμπεριφορές στα δύο άκρα της πραγματικής ευθείας.

- Επίσης απ΄ τη αναπαράσταση με σειρά βρίσκουμε

$$ \frac{d\,{}_1F_1(\alpha, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma + 1, x) \ . $$

Σχέσεις ειδικών και υπεργεωμετρικών συναρτήσεων

Οι διάφορες ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα που έχουμε μελετήσουμε σχετίζονται με υπεργεωμετρικές συναρτήσεις:

- Πολυώνυμα Legendre

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

- Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους

$$Q_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2^{n+1}\Gamma(n+3/2)} x^{-n-1}\, {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{x^2}\right) \ .$$

- Πολυώνυμα Jacobi

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\beta)}{n!\Gamma(1+\beta)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\beta, \frac{1+x}{2}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\alpha, \frac{1-x}{2}\right) \end{aligned}$$

- Πολυώνυμα Gegenbauer

$$
\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+n)}{n!\Gamma(2\alpha)}\, {}_2F_1\left(-n, 2\alpha+n, \alpha+1/2, \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{2^n\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)} x^n\, {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-\alpha-n, \frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

- Πολυώνυμα Hermite

$$
\begin{aligned}
H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\, {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right) \; , \\
H_{2n+1}(x) &= (-1)^n 2 \frac{(2n+1)!}{n!} x\, {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right) \; ,
\end{aligned}
$$

- Πολυώνυμα Laguerre

$$
L_n^{\alpha}(x) = \frac{(n+\alpha)!}{n!\alpha!}\, {}_1F_1(-n, \alpha+1, x) \; ,
$$

- Πολυώνυμα Chebyshev

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

Γενική παρατήρηση: Στις περιπτώσεις των πολυωνύμων (Legendre, Jacobi, Gegenbauer, Hermite, Laguerre και Chebyshev) η σταθερά α ή η β είναι πράγματι αρνητικός ακέραιος, όπως και πρέπει για να τερματίζεται η άπειρη σειρά.